

# Interacción ‘Oscilador’ de Partículas Relativistas\*

**Valeri V. Dvoeglazov**

*Escuela de Física, Universidad Autónoma de Zacatecas  
Antonio Dovalí Jaime s/n, Zacatecas 98068, ZAC., México  
Correo electrónico: VALERI@CANTERA.REDUAZ.MX  
(25 de junio de 1996)*

## Resumen

Es una introducción en el nivel accesible a las recientes ideas en mecánica relativista de partículas con diferentes espines, interacción de cuales es del tipo oscilador. Esta construcción matemática propuesta por M. Moshinsky pudiera proveer aplicaciones en la descripción de los procesos mediados por los campos tensoriales y en la teoría de los estados ligados.

PACS: 12.90

Typeset using REVTeX

---

\*Ciertas partes de este artículo han sido presentados en el Seminario del IFUNAM, 19 de noviembre de 1993, el Seminario de la EFUAZ, 25 de mayo de 1994 y en el Simposio de Osciladores Armónicos, Cocoyoc, México, 23-25 de marzo de 1994. Enviado a “Investigación Científica”.

## I. INTRODUCCIÓN

Con el oscilador armónico ha trabajado gran parte de su vida el doctor Marcos Moshinsky [1], alumno de Eugene Wigner y el primer *Ph. D.* en física de México, este tipo de interacción se ha sido aplcado a muchos problemas en Física Matemática, Física Atómica y Molecular, Óptica, Física Nuclear y Partículas Fundamentales. Desde 1992 se celebran Simposios Internacionales de los problemas relacionados con el oscilador ármónico. Otros físicos conocidos de México, Rusia y de los EE.UU., tales como N. Atakishiyev (IIMAS, Cuernavaca y Baku, Azerbaijan), L. C. Biedenharn (Duke, EE. UU.), O. Castaños (ICN-UNAM), J. P. Draayer (Louisiana), A. Frank (ICN-UNAM), F. Iachello (Yale, EE. UU.), Y. S. Kim (Maryland, EE. UU.), V. I. Man'ko (Lebedev, Moscú) , M. M. Nieto (LANL, EE. UU.), L. de la Peña (IF-UNAM), Yu. F. Smirnov (IF-UNAM y MSU, Moscú), K. B. Wolf (CIC, Cuernavaca) trabajan en esta área. Entonces, el objetivo de dar a conocer una parte de estos problemas a los estudiantes de la UAZ y otras instituciones de la provincia mexicana tiene suficientes razones.

En esta Sección me permito echar una breve mirada al desarrollo de estas materias hasta los años noventas. Tanto en mecánica clásica como en mecánica cuántica no relativista los problemas de movimiento del una partícula con masa en un punto en el campo potencial ‘oscilador’  $V(x) = \frac{1}{2}Kx^2$  pueden ser resueltos en forma exacta. La ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}Kx^2\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (1)$$

nos da valores propios de energía que son discretos ( $\omega = \sqrt{K/m}$ ):

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (2)$$

Este tipo del espectro se llama espectro **equidistante**. En este problema tenemos la energía **zero-point** (o, **del punto cero**,  $n = 0$ ). Como se menciona en muchos libros de mecánica cuántica esta energía está relacionada con el principio de incertidumbre — no podemos medir exactamente la coordenada y el momento lineal al mismo tiempo,

lo que resulta en la existencia de la energía mínima  $E_0 \sim \hbar\omega/2$  del sistema partícula – campo potencial [2]. Desde mi punto de vista este tipo de problemas demuestra la complicada estructura de vacío en las teorías cuánticas e importancia del concepto de paridad. Además, como todos los problemas cuánticos el sistema manifiesta el principio de correspondencia, probablemente, el principio más grande en física y filosofía (vease, por ejemplo, ref. [3, §13]).<sup>1</sup>

Entre las importantes aplicaciones del concepto ‘interacción oscilador’ (incluyendo los modelos para el problema de muchos cuerpos y los modelos con amortiguación) quisiera mencionar:

- La representación de un número infinito de los osciladores del campo y cuantización secundaria en teoría de campos cuantizados (*e.g.*, el libro de N. N. Bogoliubov, 1973);
- Los espectros de las vibraciones de moléculas en el tratamiento algebraico (*e.g.*, los artículos de F. Iachello, A. Frank);
- En los modelos de cáscaras (*e.g.*, el libro de M. Mayer y J. Jensen, 1955) y modelos del movimiento colectivo, tales como el modelo simpléctico nuclear (D. Rowe, 1977-85);
- La representación de los estados ‘squeeze’ y los estados coherentes en óptica cuántica (*e.g.*, en las Memorias de la ELAF’95, V. I. Man’ko);
- Finalmente, el oscilador armónico entró en mecánica cuántica relativista [4].

---

<sup>1</sup>Estoy impresionado por su expresión por M.M. Nieto en Memorias del II Simposio “Oscilador Armónico”: “...if you can solve (or not solve) something classically the same is true quantum mechanically, and *vice versa*”.

## II. ECUACIÓN DE DIRAC Y ECUACIONES EN LAS REPRESENTACIONES MÁS ALTAS

De la mecánica cuántica relativista sabemos la relación entre la energía, la masa y el momento lineal:<sup>2</sup>

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad . \quad (3)$$

La relación es conectada íntimamente con las transformaciones de Lorentz de la teoría de la relatividad [6, §2.3]. Pero esa ecuación no contiene información acerca del espín, la variable adicional sin fase [7] y puede describir la evolución del campo escalar, o partícula escalar, únicamente. Después de la aplicación de la transformación de Fourier obtenemos la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad . \quad (4)$$

La función  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  tiene una sola componente. La energía que corresponde a las soluciones de la ec. (4) puede tener valores tanto negativos como positivos. Aunque la densidad  $\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi \right)$  satisface la ecuación de continuidad, hay dificultades con su interpretación como densidad de probabilidad, de acuerdo con la ecuación antecedente,  $\rho$  puede ser positiva o negativa (como la energía) y no podemos ignorar las soluciones con  $E < 0$  porque en este caso las soluciones con  $E > 0$  no forman el sistema completo en sentido matemático. Por esas razones en los veinte y treinta buscaron las ecuaciones para la función con más componentes y que sean lineales en la primer derivada respecto al tiempo (como la ecuación de Schrödinger). Aunque la ecuación lineal de primer orden fue encontrada por P. Dirac en 1928, sin cierta reinterpretación ella tenía los mismos defectos. Más tarde W. Pauli, V. Weisskopf y M. Markov [8] argumentaron que  $\rho$  se tiene que considerar como la densidad de carga y quitaron una de las objeciones contra la teoría con las ecuaciones del segundo orden.

---

<sup>2</sup>El contenido de esa Sección también fue considerado desde diferentes puntos de vista en el artículo antecedente de Dvoeglazov [5]. Sería útil leer antes el artículo citado.

¿ Como manejar el grado de libertad de espín en las ecuaciones de segundo orden? Sabemos de la necesidad de introducirlo por los experimentos como la separación de las líneas espectroscópicas de la partícula cargada en el campo magnético, el efecto de Zeeman. La propuesta obvia para introducir el espín es representar el operador  $(E^2/c^2) - \mathbf{p}^2$  como

$$\left( \frac{E^{(op)}}{c} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \right) \left( \frac{E^{(op)}}{c} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \right) = (mc)^2 \quad (5)$$

y considerar la función como la con dos componentes.  $E^{(op)} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  son las matrices de Pauli de la dimensión  $2 \times 2$ . La forma estandar de ellas es

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (6)$$

Sin embargo, las diferentes representaciones de aquellos también son posibles [9, p.84]. La forma (5) es compatible con la relación dispercional relativista (3) gracias a las propiedades de las matrices de Pauli:

$$\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j + \boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma}_i = 2\delta_{ij} \quad , \quad (7)$$

donde  $\delta_{ij}$  es el simbolo de Kronecker. En el espacio de coordenadas la ecuación se lee

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x_0} + i\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x_0} - i\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \phi = (mc)^2 \phi \quad , \quad (8)$$

donde  $x_0 = ct$ . Como mencionó Sakurai [9, p.91] R. P. Feynman y L. M. Brown usaron esa ecuación del segundo orden en derivadas en tiempo y fue perfectamente válido para un electrón. Pero, como sabemos de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, cuando tratamos de resolver una ecuación de segundo orden (para predecir la conducta futura) necesitamos especificar las condiciones iniciales para la función  $\phi$  y su primera derivada en el tiempo (la condición adicional). En este punto hay diferencia con lo que hizo Dirac en 1928 cuando propuso una ecuación para electrón y positrón de primer orden en las derivadas. Me permito recordar que el bispinor de Dirac  $j = 1/2$  es con cuatro componentes y el problema puede ser resuelta si sabemos

sólo la función en el instante  $t = 0$ .<sup>3</sup> Concluyendo, podemos decir que el número de componentes independientes que tenemos que especificar para la descripción de una partícula cargada es cuatro, no importa si usamos la ecuación de Dirac o la ecuación de Waerden (8).

Sin embargo, es posible reconstruir la ecuación de Dirac empezando desde la forma (8). Para este objetivo vamos a definir

$$\phi_R \equiv \frac{1}{mc} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x_0} - i\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \phi \quad , \quad \phi_L \equiv \phi \quad . \quad (9)$$

Entonces tenemos la equivalencia entre la ecuación (8) y el conjunto

$$[i\hbar(\partial/\partial x_0) - i\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}] \phi_L = mc\phi_R \quad , \quad (10a)$$

$$[i\hbar(\partial/\partial x_0) + i\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}] \phi_R = mc\phi_L \quad . \quad (10b)$$

Tomando la suma y la diferencia de las ecuaciones (10a,10b) llegamos a la famosa ecuación presentada por Dirac ( $\psi = (\phi_R + \phi_L)/\sqrt{2}$ ,  $\chi = (\phi_R - \phi_L)/\sqrt{2}$ ):

$$\begin{pmatrix} i\hbar(\partial/\partial x_0) & i\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \\ -i\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} & -i\hbar(\partial/\partial x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \quad , \quad (11)$$

o bien,

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x^\mu) = 0 \quad , \quad \hbar = c = 1 \quad , \quad (12)$$

lo que coincide con [5, ec.(10)], la ecuación para los fermiones – partículas con el espín  $j = 1/2$ . Las matrices de Dirac tienen la siguiente forma en esta representación que se llama la representación estandar (o bien, canónica):<sup>4</sup>

---

<sup>3</sup>Otras ecuaciones en la representación  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  del grupo de Poincaré (para partículas del tipo Majorana, estados auto/contr-auto conjugados de carga) fueron propuestas recientemente por D. V. Ahluwalia, G. Ziino, A. O. Barut y por Dvoeglazov (1993-96), pero esas materias están fuera de las metas del presente artículo.

<sup>4</sup>Existe el número infinito de las representaciones de las matrices  $\gamma$ . Por eso se dice que esas matrices se definen con la precisión de la transformación unitaria.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (13)$$

donde  $\mathbb{1}$  y  $0$  se deben entender como matrices de  $2 \times 2$ . La ecuación de Klein-Gordon pudiera sido reconstruida de la ecuación (12) después de multiplicación por el operador  $[i\gamma^\mu \partial_\mu + m]$  que es otra ‘raiz cuadrada’ de la ecuación (4). Este es otro camino para deducir la ecuación de Dirac<sup>5</sup>, propuesto por B. L. van der Waerden y J. J. Sakurai [9].

Como ya sabemos la función de Dirac tiene cuatro componentes complejos. Pero, es posible saber la dimensión de las matrices de algebra de Dirac (que entran en la ecuación (12)) en base de la simple deducción matemática. De la definición (13) podemos concluir que cuatro matrices  $\gamma^\mu$  (o, bien,  $\alpha^\mu$ , véase la forma hamiltoniana [5, ec.(8)]) son anticomutados,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (14)$$

con  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  es el tensor de métrica en el espacio de Minkowski. Si  $i \neq j$  tenemos  $\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 0$ . Entonces, de acuerdo con las reglas del álgebra lineal:

$$\text{Det}(\gamma_i \gamma_j) = \text{Det}(-\gamma_j \gamma_i) = (-1)^d \text{Det}(\gamma_i \gamma_j) \quad , \quad (15)$$

que nos da información que la dimesión tiene que ser **par**. En el caso  $d = 2$  se tienen sólo tres matrices que anticonmutan una con otra, son matrices de Pauli (6) que forman el sistema completo en sentido matemático. Pero necesitamos cuatro matrices  $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  y  $\gamma^0$ . Concluimos que la dimensión tiene que ser mayor o igual a cuatro  $d \geq 4$ . La representación más simple es  $d = 4$ , véase (13).

En otras representaciones del grupo de Poincarè también se pueden proponer ecuaciones del primer orden, como hicieron de Broglie, Duffin, Kemmer y Bhabha (por ejemplo, [10]).<sup>6</sup> Ellos tienen la forma de la ecuación de Dirac pero en los casos del espín

---

<sup>5</sup>Véase Dvoeglazov [5] para otros dos.

<sup>6</sup>Véase acerca de las relaciones entre las ecuaciones de primer y de segundo orden para las partículas con el espín  $j = 1$  en ref. [5, Sección # 4].

alto la función del campo ya no es la función con cuatro componentes y las matrices no satisfacen la relación de anticonmutación (14). Pero en cada representación existen relaciones más complicadas entre esas matrices. Para el algebra de Duffin, Kemmer y Petiau, la representación  $(1, 0) \oplus (0, 1) \oplus (1/2, 1/2) \oplus (1/2, 1/2) \oplus (0, 0) \oplus (0, 0)$ , ellas se denotan como matrices  $\beta$  (en lugar de matrices  $\gamma$ ) y satisfacen

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\mu g_{\nu\lambda} + \beta_\lambda g_{\mu\nu} \quad . \quad (16)$$

Además, se puede presentar la ecuación para las partículas escalares (el campo escalar) en la forma de las derivadas de primer orden. Introduciendo para la función de Klein-Gordon la siguiente notación

$$\psi_0 \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad , \quad \psi_i \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \quad , \quad \psi_4 \equiv m\Psi \quad (17)$$

el 'vector' con cinco componentes satisface la ecuación de primer orden, que ponen en la forma hamiltoniana [11]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{1}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m\beta \right) \psi \quad . \quad (18)$$

La ecuación de Klein-Gordon se presenta también en la forma del conjunto de dos ecuaciones [10,12]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^\alpha} = \kappa \Xi_\alpha \quad , \quad \frac{\partial \Xi^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\kappa \Psi \quad , \quad (19)$$

con  $\kappa \equiv mc/\hbar$ , que toma la forma de matrices siguiente:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} \quad , \quad (20)$$

donde

$$\begin{cases} \phi = i\partial_t \Psi + m\Psi \\ \chi_i = -i\boldsymbol{\nabla}_i \Psi = \mathbf{p}_i \Psi \end{cases} \quad . \quad (21)$$

Finalmente, gracias a Dowker [13] sabemos que una partícula de cualquier espín puede ser descrita por el sistema de ecuaciones de primer orden:



$$\alpha^\mu \partial_\mu \Phi = m \Upsilon \quad , \quad (22a)$$

$$\bar{\alpha}^\mu \partial_\mu \Upsilon = -m \Phi \quad . \quad (22b)$$

$\Phi$  se transforma de acuerdo con la representación  $(j, 0) \oplus (j - 1, 0)$  y  $\Upsilon$  de acuerdo con  $(j - 1/2, 1/2)$ . Las matrices  $\alpha^\mu$  en este caso generalizado tienen dimensión  $4j \times 4j$ .

Muchas características de las partículas pueden ser obtenidas por el análisis de la teoría de campos libres, por la ecuaciones de la mecánica cuántica relativista que presentamos en esa Sección. Lo importante es prestar atención al formalismo matemático del grupo de Poincarè, desarrollado basicamente por Wigner. Como diría el profesor A. Barut esa materia es muy viva hasta ahora. Pero, la física siempre tiene muchos caminos: gracias al desarrollo de los aceleradores de altas energías la tarea de los físicos en los últimos cincuenta años era explicar los procesos con el cambio del número de partículas, para este objetivo era necesario desarrollar la metódica de calculaciones, tales como la metódica de diagramas de Feynman, la teoría de la matriz  $S$ , modelos potenciales etc. Gran parte de esos cálculos se basan en el concepto de la interacción, principalmente el concepto de la interacción minimal,  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$ , donde  $A_\mu$  es el potencial 4-vector. Pero, matemáticamente, es posible introducir otros tipos de interacción como lo hizo el doctor Moshinsky.

### III. OSCILADOR DE DIRAC DE MOSHINSKY

El concepto del oscilador armónico relativista fue propuesto por primera vez hace mucho tiempo [14] pero fue olvidado y redescubierto en 1989 por el doctor Marcos Moshinsky [4]. En el caso del problema de un cuerpo él caracteriza por la siguiente substitución de interacción **no-minimal** en la ecuación de Dirac:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega \mathbf{r} \beta \quad , \quad (23)$$

donde  $m$  es la masa del fermión,  $\omega$  es la frecuencia del oscilador,  $\mathbf{r}$  es la coordenada 3-dimensional, y  $\beta \equiv \gamma^0$  es una de matrices de algebra de Dirac (que también es la

matriz del operador de paridad). Existen muy pocos problemas de interacción de una partícula, tales como a) potencial de Coulomb; b) campo magnético uniforme; c) la onda electromagnética plana, que se puede resolver en forma exacta en mecánica cuántica. El oscilador de Dirac de Moshinsky es un de ellos y un poco parecida al problema b).<sup>7</sup> Las soluciones del conjunto para 2-espinores [4]

$$(E - mc^2)\psi = c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})\chi \quad , \quad (24a)$$

$$(E + mc^2)\chi = c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})\psi \quad (24b)$$

se han dados por el ket

$$|N(l\frac{1}{2})jm\rangle = \sum_{\mu\sigma} \langle l\mu, \frac{1}{2}\sigma | jm \rangle R_{Nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \chi_{\sigma} \quad . \quad (25)$$

El espectro de energía es entonces

$$(mc^2)^{-1}(E_{Nlj}^2 - m^2c^4) = \begin{cases} \hbar\omega [2(N-j)+1] & , \quad \text{if } l = j - \frac{1}{2} \\ \hbar\omega [2(N+j)+3] & , \quad \text{if } l = j + \frac{1}{2} \end{cases} \quad . \quad (26)$$

Fue demostrado en los artículos [15] que la ecuaciones (24a,24b) pueden ponerse en la forma covariante:

$$\left( \hat{p} - mc + \kappa \frac{e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \Psi = 0 \quad , \quad \kappa = 2m^2\omega/e \quad , \quad (27)$$

que significa que la interacción ‘oscilador’ en el problema de un cuerpo es esencialmente la interacción tensorial con el campo eléctrico (¡ **no** con el vector potencial!). Aunque en esa consideración  $F^{\mu\nu} = u_{\mu}x_{\nu} - u_{\nu}x_{\mu}$  con  $u_{\mu} = (1, \mathbf{0})$  *i.e.* es dependiente del sistema de referencia, no es difícil aplicar las transformaciones de Lorentz (**boost** y rotaciones) para reconstruir todos los resultados para los observables físicos de cualquier sistema inercial. Dos notas que pudiera ser útiles para las investigaciones futuras: 1) El vector  $u^{\mu}$  pudiera ser utilizado para la definición de la parte transversal de  $x^{\mu}$ , a saber  $x_{\perp}^{\mu} \equiv$

---

<sup>7</sup>En el problema de la partícula en un campo magnético uniforme tenemos los terminos adicionales  $\sim (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p})$ . Es tarea para el lector comprobar los cálculos en [11, p.67] y compararlos con el problema que consideramos en el texto de este artículo.

$x^\mu + (x^\nu u_\nu)u^\mu$ ; 2) La necesidad de la interacción tensorial ya fue aprobada en base del analisis de los datos experimentales de los decaimientos de  $\pi^-$  y  $K^+$  mesones (V. N. Bolotov *et al.*, S. A. Akimenko *et al.*, 1990-96).

Como se ha demostrado en unos artículos *e.g.* [16], ese tipo de interacción preserva la **supersimetría** de Dirac, el caso particular de **supersimetría**. Generalmente, el concepto de **supersimetría** se define en el sentido de teoría de grupos como una algebra:

$$\{\hat{Q}, \hat{Q}\}_+ = \{\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}^\dagger\}_+ = 0 \quad , \quad (28a)$$

$$[\hat{Q}, \hat{\mathcal{H}}]_- = [\hat{Q}^\dagger, \hat{\mathcal{H}}]_- = 0 \quad , \quad (28b)$$

$$\{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\}_+ = \hat{\mathcal{H}} \quad . \quad (28c)$$

$\hat{Q}^\dagger$  y  $\hat{Q}$  se llama **supercargas**. En el caso de la mecánica cuántica relativista de particulas cargadas con espin  $j = 1/2$ , el hamiltoniano se ha dado por [16]

$$\hat{\mathcal{H}} = Q + Q^\dagger + \lambda \quad , \quad (29)$$

$\lambda$  es hermitiana. Entonces, si

$$\{Q, \lambda\} = \{Q^\dagger, \lambda\} = 0 = Q^2 = Q^{\dagger 2} \quad (30)$$

tenemos

$$\{Q, Q^\dagger\} = \hat{\mathcal{H}}^2 - \lambda^2 \quad . \quad (31)$$

Por ejemplo, si

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad y \quad , \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

todas las condiciones (29,30,31) se satisfacen y de (31) obtenemos la ecuación del oscilador de Dirac. Otros tipos del oscilador armónico relativista para el problema de un cuerpo han sido propuestas en [17], es interesante que éstos están relacionados con la interacción con la carga quiral o con coplamiento pseudoescalar,  $m \rightarrow m[1 + (w/c)r\gamma_5]$ .

El profesor Moshinsky dijo en muchos seminarios que sus objetivos al inventar ese tipo de interacción eran aplicarlo al problema cuántico relativista de muchos cuerpos. Aunque existe el formalismo de Bethe y Salpeter [18] y los métodos para manejar este formalismo [19] con el tiempo relativo,<sup>8</sup> fueron aprobados en base a la comparación de los resultados teóricos y del experimento, no todos físicos quieren usarlo, principalmente, por su complejidad. Unos problemas de descripción alternativa han sido considerados [20–22,1] desde diferentes puntos de vista. Las interacciones del tipo ‘oscilador’ han sido propuestas para la “ecuación de Dirac” para dos cuerpos. En este caso podemos considerar la ecuación

$$\left[ (\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) \cdot (\mathbf{p} - i\frac{m\omega}{2}\mathbf{r}\mathcal{B}) + mc(\beta_1 + \beta_2) \right] \psi = \frac{E}{c}\psi \quad . \quad (33)$$

Los índices 1 y 2 indican el espacio de representación de primera o segunda partícula. En lugar de la matriz  $\mathcal{B}$  pueden ser substituidos  $B = \beta_1\beta_2$  o  $B\Gamma_5 = \beta_1\beta_2\gamma_1^5\gamma_2^5$ . Entonces, tenemos dos tipos de oscilador para dos cuerpos. Los espectros son parecidos [23]. Además, ambos dan los valores propios de energía  $E = 0$ , **relativistic cockroach nest** (RCN) [21,23], como les nombró el doctor Moshinsky.<sup>9</sup>

Las contribuciones de otros grupos científicos serán consideradas en la siguiente Sección.

---

<sup>8</sup>Recuerda las palabras de Eddington: “Un electron ayer y un proton hoy no forman el atomo de hidrogeno”.

<sup>9</sup>Pienso que al problema del RCN se requiere más atención. Él puede ser relacionado con las soluciones con  $E = 0$  que eran descubiertas en otros sistemas físicos (por ejemplo, en las conocidas ecuaciones para el campo tensorial antisimétrico de segundo rango, así como en las ecuaciones de primer orden para  $j = 3/2$  y  $j = 2$ , el último es el campo gravitacional en la  $(2,0) \oplus (0,2)$  representación) por D. V. Ahluwalia, A. E. Chubykalo, M. W. Evans y J.-P. Vigiér, y por V. V. Dvoeglazov. Pero esa materia tiene que ser discutida en un artículo aparte.

#### IV. INTERACCIÓN ‘OSCILADOR’ PARA LAS PARTÍCULAS CON ESPIN ALTO.

Las ecuaciones con la interacción ‘oscilador’ relativista han sido tratados en los artículos [24–31] desde diversos puntos de vista. Ellos son para los espines diferentes del espín  $j = 1/2$ .

El operador de coordenada y el operador de momento [25] lineal han sido escogidos como  $n \times n$  matrices:  $\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\eta}\mathbf{q}$  y  $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\eta}\mathbf{p}$ . La interacción introducida en la ecuación de Klein-Gordon fue entonces  $\hat{\mathbf{P}} \rightarrow \hat{\mathbf{P}} - im\hat{\gamma}\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{Q}}$ . Las matrices satisfacen las condiciones

$$\hat{\eta}^2 = \mathbb{1} \quad , \quad \hat{\gamma}^2 = \mathbb{1} \quad , \quad \text{y} \quad \{\hat{\gamma}, \hat{\eta}\}_+ = 0 \quad . \quad (34)$$

$\Omega$  es la matriz de las frecuencias , de dimensión  $3 \times 3$ . Como resultado tenemos el oscilador anisotrópico en tres dimensiones:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\mathbf{q}, t) = \left( \mathbf{p}^2 + m^2\mathbf{q} \cdot \hat{\Omega}^2 \cdot \mathbf{q} + m\hat{\gamma} \text{tr}\Omega + m^2 \right) \Psi(\mathbf{q}, t) \quad , \quad (35)$$

donde la forma explicita de las matrices constituyentes es

$$\hat{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\gamma} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (36)$$

El espectro en el límite no relativista llega a ser el espectro del oscilador anisotrópico.

Pero las razones de introducir la forma matricial en la ecuación de Klein-Gordon no han sido claros en este artículo. En otros trabajos [27,28] otro formalismo para la descripción de partícula con  $j = 0$  y  $j = 1$  es presentado. Como mencionamos, la ecuación de Klein-Gordon puede ser presentada en la forma (19). Entonces, la interacción ‘oscilador’ se introduce a la ecuación (20) en la misma manera:  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}$  con  $\beta$ , la matriz ante el término de masa en (20). En caso  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \equiv \omega$  la ecuación resultante coincide con (10a) de ref. [25].

Las ecuaciones para la interacción ‘oscilador’ de partículas con  $j = 0$  y  $j = 1$  también se han discutido en [24,26,30,31]. La ecuación hamiltoniana en el formalismo

de Duffin, Kemmer y Petiau toma la forma<sup>10</sup>

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + m\beta_0) \Phi \quad , \quad B_\mu = [\beta_0, \beta_\mu]_- \quad , \quad (37)$$

donde  $\Phi$  es la función con 5 componentes en el caso  $j = 0$  y con 10 componentes en el caso  $j = 1$ . La interacción que introducen N. Debergh *et al.* [24] es  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\eta_0\mathbf{r}$ ,  $\eta_0 = 2\beta_0^2 - 1$ . Como el resultado, en el limite no relativista se encuentra el mismo término  $\frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2$  que en el caso de la representación  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  anterior. Además, también tenemos el coplamiento espin-orbita. Este es el oscilador de Duffin y Kemmer. La misma substitución nomininal fue discutida por Nedjadi y Barrett [26] pero fue introducida en la forma covariante de la ecuación de Duffin, Kemmer y Petiau (véase footnote # 10).

En otro artículo se empesó desde el sistema de ecuaciones de Bargmann-Wigner (ecs. (2,3) en ref. [30]) y se consideró la función de Bargmann-Wigner antisimétrica en los índices espinoreales (ec. (4) en ref. [30]). Los resultados de ese artículo llegan a una conclusión acerca de la existencia de los estados doble degenerados en  $N$ , el numero cuántico principal, en el límite  $\hbar\omega \ll mc^2$  excepto el nivel de base.

Los términos de interacción en tres artículos citados pueden ser presentados en forma covariante como los términos de interacción de la forma  $\kappa S^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , *cf.* con (27). Vamos a componer una tabla en que se comparan las formas de interacción de varios artículos:

---

<sup>10</sup>Recuerda que las matrices  $\beta$  no anticonmutan, entonces, la reducción de la ecuación covariante a forma hamiltoniana es más complicada. Además, es necesario mencionar que en el proceso de deducción de la forma hamiltoniana [32] los autores hicieron un procedimiento matemáticamente dudoso cuando se multiplicó la ecuación por la matriz singular  $\beta_0$ . Sin embargo, depende del lector si ser de acuerdo con la discusión en p. 110 de ref. [32a].

---

Referencia El termino de interacción

---

$$[24] \quad S^{\mu\nu} = -2i \{\beta^\mu, B^\nu\}_+$$

$$[26] \quad S^{\mu\nu} = \beta^\mu \eta^\nu$$

$$[30] \quad S^{\mu\nu} = \beta^\mu \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\mu$$

---

También han sido considerados:

- La interacción ‘oscilador’ en el formalismo de Sakata y Taketani [24,27,28];
- El oscilador de Dirac en  $(1 + 1)$  dimensión [33,28];
- El oscilador de Dirac en la forma con cuaterniones [27];
- El oscilador para el sistema de ecuaciones de Dowker (22a,22b), lo que significa que este tipo de interacción puede ser introducido para cualquier espín [29];
- El oscilador en el  $2(2j + 1)$  formalismo [27];
- El oscilador de Dirac para el sistema de dos cuerpos y su conexión con el formalismo de Proca, y de Bargmann y Wigner [27,31].

Finalmente, del conjunto de las ecuaciones de Crater y van Alstine [34] y Sazdjian [35] para un problema de dos cuerpos podemos deducir una ecuación muy parecida a la ecuación de oscilador de Dirac para dos cuerpos con el término de potencial más general [22b]:

$$\mathcal{V}^{int}(r) = \frac{1}{r} \frac{dV(r)/dr}{1 - [V(r)]^2} i(\alpha_2 - \alpha_1) B\Gamma_5 \mathbf{r} \quad . \quad (38)$$

M. Moshinsky *et al.* escogieron  $V(r) = \tanh(\omega r^2/4)$  y obtuvieron el oscilador de Dirac con la interacción del segundo tipo  $B\Gamma_5 \mathbf{r}$ , véase (33). Nosotros queremos conectar esa formulación con las antecedentes y proveer alguna base para escoger el potencial. Para este objetivo vamos recordar el artículo [36] donde el potencial en la representación configuracional relativista

$$V(r) = -g^2 \frac{\coth(rm\pi)}{4\pi r} \quad (39)$$

ha sido deducido en base del análisis de la serie principal y la serie complementaria del grupo de Lorentz y la aplicación de las transformaciones de Shapiro en lugar de las transformaciones de Fourier al potencial de Coulomb en el espacio del momento lineal; la coordenada en el espacio configuracional se considera en la forma más general y puede ser imaginario  $r \rightarrow i\rho$ . Esa forma de potencial encontró algunas aplicaciones en los modelos potenciales de cromodinámica cuántica y electrodinámica cuántica. Entonces, el uso del potencial de Skachkov tiene razones definitivas. En caso del uso del potencial (39) tenemos una conducta asintótica del término  $\mathcal{V}^{int}$  diferente en tres regiones. En la región  $r \gg \frac{1}{m\pi}$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{int}(r) &\sim \frac{1}{r [r^2 - (g/4\pi)^2]} (\alpha_1 - \alpha_2) B\Gamma_5 \mathbf{r} \approx \\ &\approx \begin{cases} (1/r^3) i(\alpha_1 - \alpha_2) B\Gamma_5 \mathbf{r} & , \quad \text{si } r \gg \frac{1}{m\pi} \text{ y } r > (\frac{g}{4\pi})^2 \\ -(1/r) i(\alpha_1 - \alpha_2) B\Gamma_5 \mathbf{r} & , \quad \text{si } \frac{1}{m\pi} \ll r < (\frac{g}{4\pi})^2 \end{cases} ; \end{aligned} \quad (40)$$

y en la región  $r \ll \frac{1}{\kappa}$

$$\mathcal{V}^{int}(r) \sim -im(\alpha_1 - \alpha_2) B\Gamma_5 \mathbf{r} \quad , \quad \text{si } r \ll \frac{1}{m\pi} \quad . \quad (41)$$

Entonces, podemos ver que en la región de las distancias pequeñas tenemos precisamente la conducta del potencial del oscilador de Dirac. En la región de las distancias grandes tenemos la conducta del potencial de inversos grados en  $r$ .

Como conclusión: el concepto del ‘oscilador de Dirac’ aunque ha sido propuesto recientemente se ha desarrollado mucho en los últimos años pues nos permite describir bien diferentes sistemas físicos relativistas (incluyendo espectros de mesones y bariones) desde un punto de vista diferente al punto de vista común. Esas ideas se publican en las revistas de mayor nivel internacional como *Physical Review Letters*, *Physics Letters*, *Journal of Physics* y *Nuovo Cimento*. Por eso yo llamo a los jóvenes físicos mexicanos aplicar sus talentos a esa área de investigaciones.

Quiero indicar que en esa nota únicamente delineemos unos rasgos de ese problema de la mecánica cuántica relativista y no toquemos muchas ideas (por ejemplo, las teorías del electrón extendido con adicionales grados de libertad intrínsecos [37]) que



pueden tener cierta relación con el ‘oscilador de Dirac’ pero que todavía no han sido desarrollados suficientemente y no han sido aceptados por mucha gente.

Agradezco mucho al doctor D. Armando Contreras Solorio por su invitación a trabajar en la Escuela de Física de la Universidad Autónoma de Zacatecas y los doctores M. Moshinsky, Yu. F. Smirnov y A. Del Sol Mesa por sus valiosas discusiones. Reconozco la ayuda en la ortografía española del Sr. Jesús Alberto Cázares.

## REFERENCIAS

- [1] M. Moshinsky y Yu. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics: From Atoms to Quarks*. Segunda edición revisado y expandido. (Gordon & Breach, New York, 1996)
- [2] A. Yariv, *An Introduction to Theory and Applications of Quantum Mechanics*. (John Wiley & Sons, New York, 1982)
- [3] L. I. Schiff, *Quantum mechanics*. Third edition. (McGraw-Hill Book Co., 1968)
- [4] M. Moshinsky y A. Szczepaniak, J. Phys. **A27** (1989) L817
- [5] V. V. Dvoeglazov, Investigación Científica, enviado
- [6] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. (Cambridge University Press, 1985)
- [7] E. Wigner, Ann. Math. **40** (1939) 149
- [8] W. Pauli y V. Weisskopf, Helv. Phys. Acta **7** (1934) 709; M. Markov, ZhETF **7** (1937) 579, 603
- [9] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*. (Addison-Wesley Pub. Co., Inc., California, 1987)
- [10] H. Feshbach y F. Villars, Rev. Mod. Phys. **30** (1958) 24; R. A. Krajcik y M. M. Nieto, Am. J. Phys. **45** (1977) 818
- [11] C. Itzykson y J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*. (McGraw-Hill Book Co., 1980)
- [12] M. D. Kostin, Phys. Lett. **A125** (1987) 87
- [13] J. S. Dowker y Y. P. Dowker, Proc. Roy. Soc. **A294** (1966) 175; J. S. Dowker, ibid **297** (1967) 351
- [14] D. Itô, K. Mori y E. Carriere, Nuovo Cim. **51A** (1967) 1119; P. A. Cook, Lett. Nuovo Cim. **1** (1971) 149
- [15] M. Moreno y A. Zentella, J. Phys. **A27** (1989) L821; M. Moreno, R. Martínez y A. Zentella, Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 949; J. Benítez *et al.*, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1643
- [16] R. P. Martínez y Romero, M. Moreno y A. Zentella, Phys. Rev. **D43** (1991) 2036; M. Moreno, en *Proc. Int. Conf. on the Theory of the Electron. Cuautitlán, México, Sept. 27-29, 1995* (UNAM, México, 1996)

- [17] V. V. Dixit, T. S. Santhanam y W. D. Thacker, J. Math. Phys. **33** (1992) 1114; V. V. Dvoeglazov, Hadronic J. **16** (1993) 423
- [18] H. A. Bethe y E. E. Salpeter, Phys. Rev. **82** (1951) 309; *ibid* **84** (1951) 1232
- [19] V. V. Dvoeglazov, Yu. N. Tyukhtyaev and R. N. Faustov, Fiz. Elem. Chast. At. Yadra **25** (1994) 145; Phys. Part. Nucl. **25** (1994) 58 – el artículo de revisión invitado
- [20] A. O. Barut y S. Komy, Fortschr. Phys. **33** (1985) 6; A. O. Barut y G. L. Strobel, Few Body Systems **1** (1986) 167
- [21] M. Moshinsky y A. del Sol Mesa, Can J. Phys. **72** (1994) 453
- [22] M. Moshinsky, G. Loyola y A. Szczepaniak, en *J. J. Giambiagi Festschrift*. Eds. H. Falomir *et al.* (World Scientific, 1990); M. Moshinsky y A. del Sol Mesa, J. Phys. A **27** (1994) 4685
- [23] M. Moshinsky, en *AIP Conf. Proc.* **365**. *XXX Latin-American School of Physics*. Eds. O. Castaños *et al.* (Am. Inst. Phys., 1996), p. 279
- [24] N. Debergh, J. Ndimubandi y D. Strivay, Zeit. Phys. C **56** (1992) 421
- [25] S. Bruce y P. Minning, Nuovo Cim. A **106** (1993) 711
- [26] Y. Nedjadi y R. Barrett, J. Phys. A **27** (1994) 4301
- [27] V. V. Dvoeglazov y A. del Sol Mesa, en *Proc. NASA Conference “Osciladores Armónicos”, Cocoyoc, 23-25 de marzo de 1994*. NASA Conf. Pub. No. 3286, p. 333-340
- [28] V. V. Dvoeglazov, Nuovo Cim. A **107** (1994) 1413
- [29] V. V. Dvoeglazov, Nuovo Cim. A **107** (1994) 1785
- [30] V. V. Dvoeglazov, Rev. Mex. Física **42** (1996) 172
- [31] V. V. Dvoeglazov, Rev. Mex. Física, enviado
- [32] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. (London) A **173** (1939) 91; K. M. Case, Phys. Rev. **100** (1955) 1513
- [33] F. Dominguez-Adame, Phys. Lett. A **162** (1992) 18
- [34] H. W. Crater y P. van Alstine, Ann. Phys. **148** (1983) 57; H. W. Crater *et al.*, Phys. Rev. D **46** (1992) 5117
- [35] H. Sazdjian, Phys. Rev. D **33** (1986) 3425
- [36] N. B. Skachkov, Phys. Lett. B **78** (1978) 231
- [37] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **322** (1971) 435; *ibid* A **328** (1972) 1